

Podstawy geodezji
laboratoria

PODSTAWY TEORII BŁĘDÓW

mgr inż. Anna Małek

mgr inż. Michał Moczko



61 665 24 21



<https://anna.malek.pracownik.put.poznan.pl>



Wprowadzenie

Każdy pomiar, również ten geodezyjny, obarczony jest wpływem błędów. Zgodnie z definicją, błędem nazywamy różnicę pomiędzy wartością prawdziwą a obserwowaną (zmierzoną). Z reguły wartość prawdziwa nie jest znana, stąd błąd utożsamia się z dokładnością pomiaru.



warto zapamiętać: w geodezji, pomiar nazywany jest obserwacją



T H E O R Y



podział błędów

błędy można dzielić ze względu na źródło powstawania:

- osobiste (związane z obserwatorem);
- instrumentalne (wynikające z niedoskonałości sprzętu pomiarowego);
- naturalne (wynikające ze zmienności czynników środowiska)

błędy grube

inaczej zwane omyłkami, które to wynikają najczęściej z nieuwagi obserwatora. Ich wartość jest znacząco różna od wielkości mierzonej, stąd łatwo je zidentyfikować i wyeliminować (obserwacje odstające)

przykład: nieprawidłowo zapisany odczyt kierunku



błędy systematyczne

zależne przede wszystkim od takich czynników jak niedoskonałość instrumentów pomiarowych czy czynniki środowiskowe (atmosferyczne), w konsekwencji następuje przesunięcie wszystkich obserwacji

przykład: wpływ temperatury powietrza na pomiar odległości dalmierzem elektronicznym



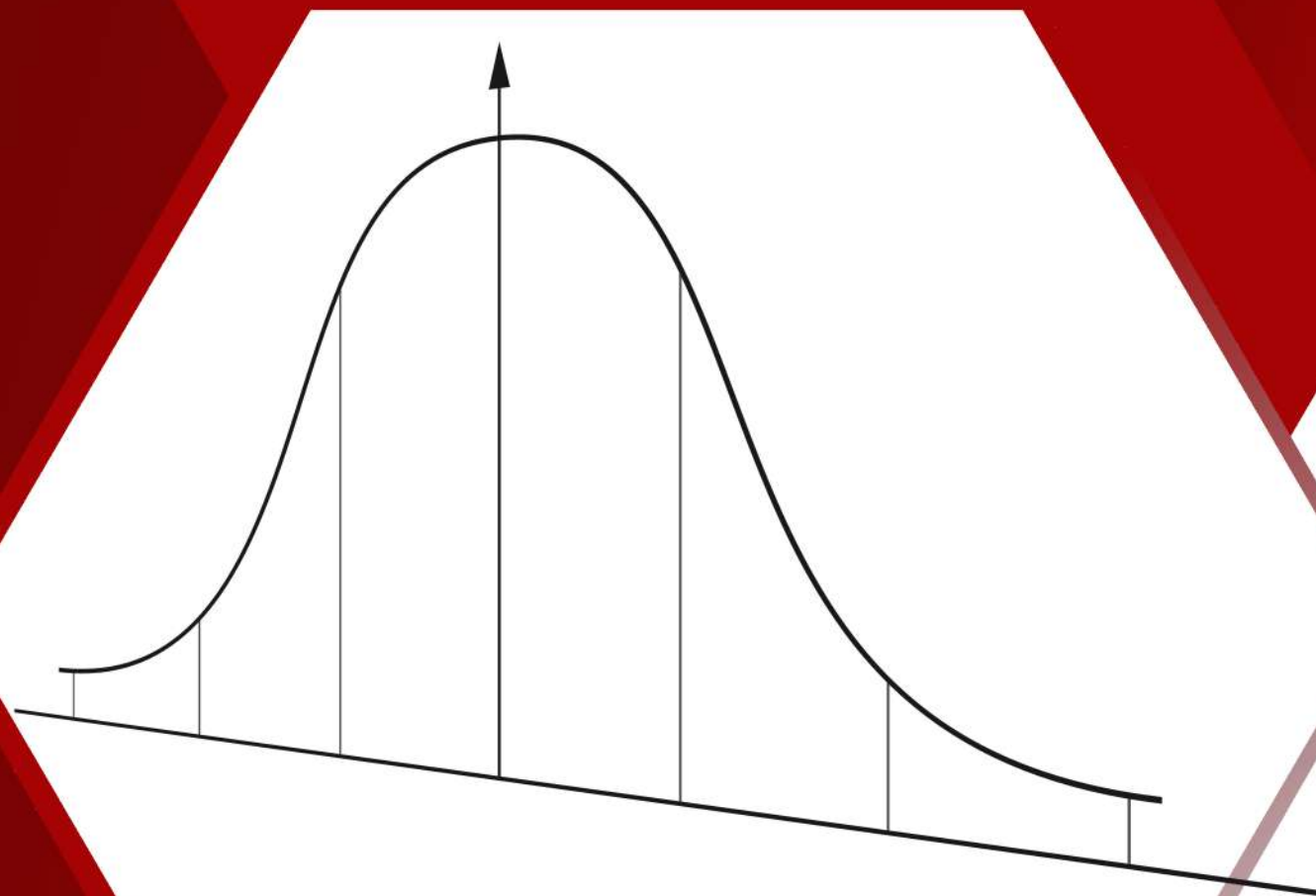
błędy przypadkowe

błędy te obarczają wynik pomiaru, kiedy wyeliminujemy wpływ błędów grubych i systematycznych. Ze względu na trudność ich identyfikacji i eliminacji. wykonuje się obserwacje nadliczbowe, czyli w większej liczbie niż jest potrzebna do rozwiązania zadania





Normalny rozkład błędów



jak zmniejszyć wpływ błędów przypadkowych na wynik pomiaru
efekt można osiągnąć poprzez tzw. wyrównanie obserwacji, wraz z oceną dokładności po ich wyrównaniu



metoda najmniejszych kwadratów
najbardziej prawdopodobne rozłożenie błędów obserwacji jednakowo dokładnych, zgodnie z rozkładem normalnym, następuje wtedy, gdy suma kwadratów poprawek osiąga wartość najmniejszą, tj.:

$$[vv] = \min$$



krzywa Gaussa

normalny rozkład błędów wynika z krzywej Gaussa, która prezentuje rozkład błędów przypadkowych, czyli prawdopodobieństwo ich wystąpienia. Krzywa jest symetryczna względem $m=0$ oraz pole pod nią jest równe 1. Prawdopodobieństwo wystąpienia małych błędów jest duże, gdyż dla $m=0$ krzywa przyjmuje wartość maksymalną, natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia błędów dużych jest małe, ponieważ krzywa szybko zbliża się do osi poziomej.

Średnia arytmetyczna jako wynik pomiaru

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$



w przypadku, kiedy wykonujemy pomiar danej wielkości ileś razy, zazwyczaj uzyskujemy różniące się wyniki.

W celu obliczenia finalnej wartości (wyniku) właściwym będzie zastosowanie średniej arytmetycznej.

$$x = \frac{[L]}{n} \quad n\text{-ilość pom.}$$

warto zapamiętać:
w przypadku obserwacji niejednakowo dokładnych (np. wykonanych sprzętem o różnej dokładności) należy wprowadzić pojęcie **wagi**, czyli istotności danej obserwacji w toku obliczeniowym

znając wartość średnią, można zapisać równania błędów oraz obliczyć wartości poprawek (v) dla każdej obserwacji

$$v_i = x - L_i \quad \text{-równania błędów}$$

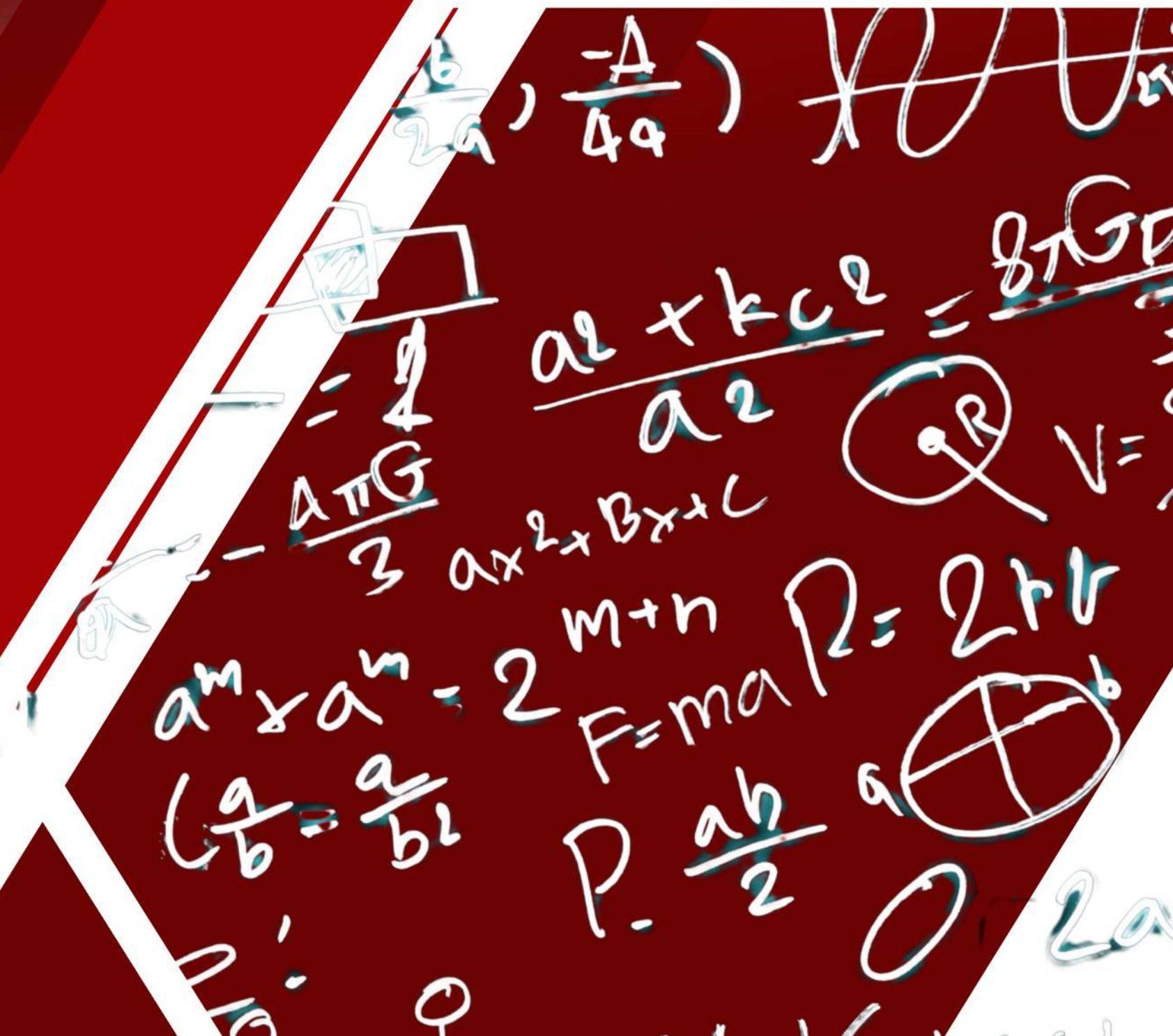
na podstawie tychże równań (i wartości poprawek) można obliczyć błąd średni pojedynczej obserwacji (zwany także odchyleniem standardowym)

błąd średni
pojedynczej obserwacji m_0

$$m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

oraz błąd średni średniej arytmetycznej:

$$m_x = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$



Przykład obliczeniowy dla pomiaru długości (odległości)



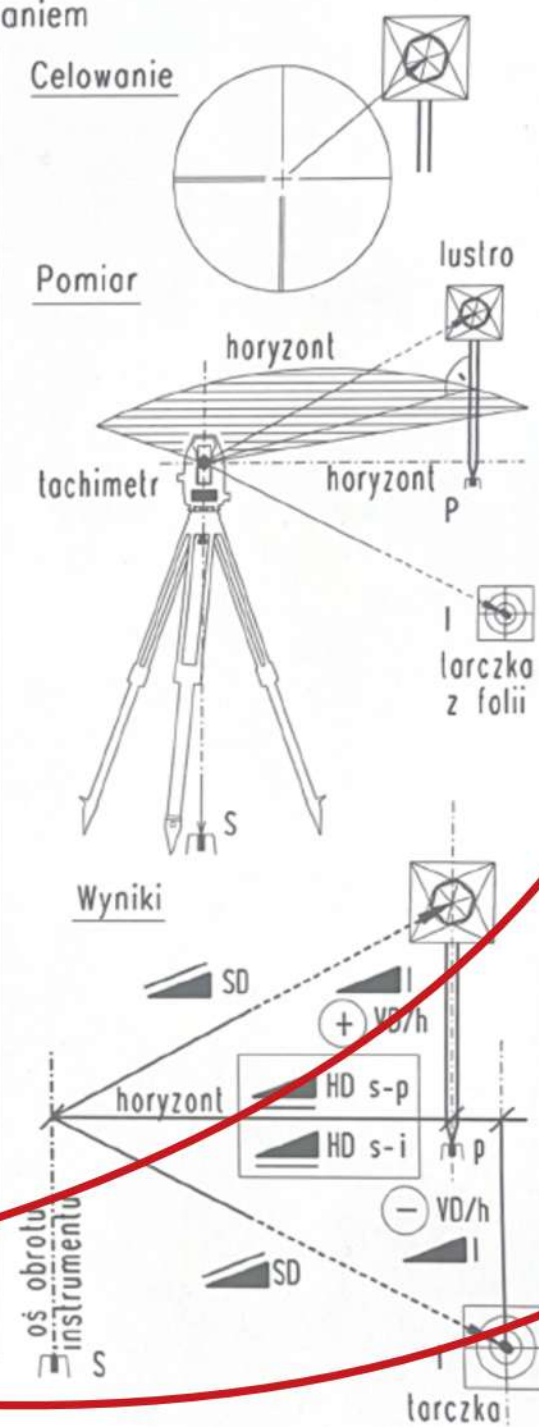
Ćwiczenie 2 - Pomiary długości $\oplus N = \bigcirc$

Dopuszczalny błąd długości 10mm+/-10mm/km

Tachimetr o dokładności pomiaru długości $m_d = +/-2mm +/-2ppm$

Dziennik pomiaru długości dalmierzem elektrooptycznym z wyrównaniem

Nr ston.	Nr celu	Nr pom.	Odczyt Li		vi	vv	Temperatura: 20 °C Ciśnienie: 1023 hPa
			m,	,mm	(mm)	[mm ²]	
1	2	3	4	5	6		
S	P	1	63	550	2	4	$L_i + v_i = X$ - równania obserwacyjne postulat w metodzie najmniejszych kwadratów błędów $[vv] = \min.$ $X = \frac{[L]}{n}$ n-ilość pom. $v_i = X - L_i$ - równania błędów $[v] \approx 0$ - kontrola błąd średni pojedynczej obserwacji m_0 $m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ błąd średni wartości wyrównanej m_x $m_x = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$ $X = 63,552 \text{ m}$ $m_0 = 10 \text{ mm}$ $m_x = 4 \text{ mm}$ $L = X \pm m_x = 63,552 \pm 4 \text{ mm}$
		2	63	562	-10	100	
		3	63	543	9	81	
		4	63	566	-14	196	
		5	63	547	5	25	
		6	63	545	7	49	
		7					
		8					
		9					
		10					
		11					
		12					
		13					
		14					
		15					
		16					
pomiarów		n=	6	381,313	-1	455	
			[L]↑	[v]↑	[vv]↑		
			SUMA	SUMA	SUMA		



Podstawy geodezji
laboratoria

obserwacje
(wyniki pomiaru)

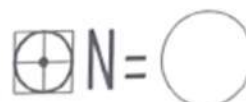
poprawka
(v) dla
każdej
obserwacji

kwadrat
poprawek

wartości błędów:
• średniego dla pojedynczej obserwacji
• średniej arytmetycznej (wartości wyrównanej)

suma
• obserwacji
• poprawek
• kwadratów poprawek

Ćwiczenie 2 - Pomiar długości



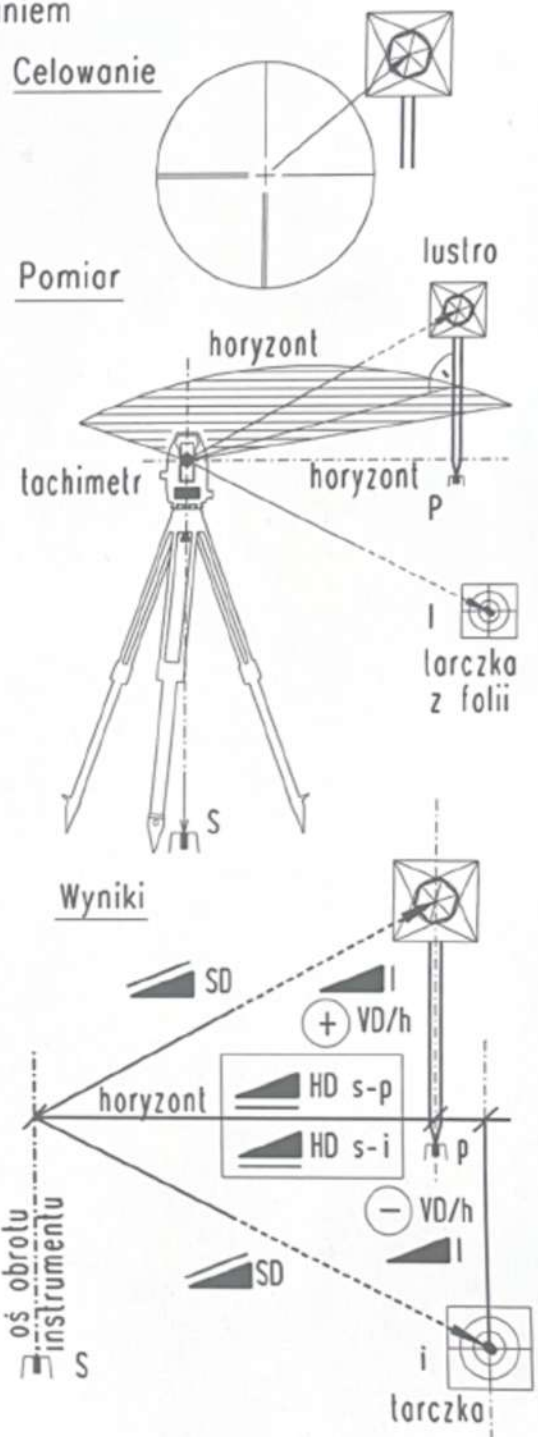
Dopuszczalny błąd długości 10mm+/-10mm/km

Tachimetr o dokładności pomiaru długości md=+/-2mm+/-2ppm

Dziennik pomiaru długości dalmierzem elektrooptycznym z wyrównaniem

Nr stan.	Nr celu	Nr pom.	Odczyt Li		vi	vv	Temperatura: 20 °C Ciśnienie: 1023 hPa
			m,	,mm			
1	2	3	4	5	6		
S	P	1	63	550	2	4	$L_i + v_i = X$ - równania obserwacyjne postulat w metodzie najmniejszych kwadratów błędów $[vv] = \min.$ $X = \frac{[L]}{n}$ n-ilość pom. $v_i = X - L_i$ - równania błędów $[v] \approx 0$ - kontrola błęd średni pojedynczej obserwacji m_0 $m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ błąd średni wartości wyrównanej m_x $m_x = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$ $X = 63,552 \text{ m}$ $m_0 = 10 \text{ mm}$ $m_x = 4 \text{ mm}$ $L = X \pm m_x = 63,552 \pm 4 \text{ mm}$
		2	63	562	-10	100	
		3	63	543	9	81	
		4	63	566	-14	196	
		5	63	547	5	25	
		6	63	545	7	49	
		7					
		8					
		9					
		10					
		11					
		12					
		13					
		14					
		15					
		16					
pomiarów		n=	6	381,313	-1	455	

[L]↑ SUMA [v]↑ SUMA [vv]↑ SUMA



$$X = 63,552 \text{ m}$$

$$v_i = X - L_i$$

$$v_1 = 63,552 - 63,550 = 2 \text{ mm} \Rightarrow vv = 4 \text{ mm}$$

$$v_2 = 63,552 - 63,562 = -10 \text{ mm} \Rightarrow vv = 100 \text{ mm}$$

$$\vdots$$

$$v_6 = 63,552 - 63,545 = 7 \text{ mm} \Rightarrow vv = 49 \text{ mm}$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

$$[vv] = 455 \text{ mm}$$

$$n = 6$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{455}{5}} = 10 \text{ mm}$$

$$m_x = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

$$m_x = \sqrt{\frac{455}{6(6-1)}} = 4 \text{ mm}$$

Podstawy geodezji
- laboratoria

DZIĘKUJEMY

**ZA UWAGĘ, W RAZIE PYTAŃ,
POZOSTAJEMY DO DYSPOZYCJI**

mgr inż. Anna Małek
mgr inż. Michał Moczko

 <https://anna.malek.pracownik.put.poznan.pl>

 61 665 24 21

 anna.malek@put.poznan.pl
michal.moczko@put.poznan.pl